УДК 517.958

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1)]

М.М. КАРЧЕВСКИЙ

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail mkarchev@kpfu.ru

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC SYSTEMS OF SECOND ORDER

M.M. KARCHEVSKY

Kazan Federal University

Аннотация

Изучаются вопросы однозначной обобщенной разрешимости дивергентных эллиптических систем второго порядка. Рассматриваемые системы имеют общую форму и включают, в частности, системы линейной теории упругости. Исследованы различные варианты постановки граничных условий: задача Дирихле, третья краевая задача, задача Неймана, задача о жестком контакте, задача о нормальной нагрузке

Ключевые слова: Эллиптические системы второго порядка, краевые задачи, интегральное тождество, теоремы существования и единственности.

Summary

The unique generalized solvability of divergent elliptic systems of second order is studied. The systems that we consider have general form and include particularly the systems of linear elasticity theory. The different variants of boundary conditions statement are considered, namely the Dirichlet boundary value problem, the Neumann boundary value problem, the third boundary value problem, the problem of rigid contact and the problem of normal load.

Key words: Nonlinear seepage theory, finite element method, mixed finite element method, iterative method.

Введение

В предлагаемой работе, имеющей, в основном, методический характер, исследуются обобщенные постановки граничных задач для дивергентных эллиптических систем второго порядка общего вида. Мы старались максимально приблизить форму изложения материала к хорошо изученному случаю скалярных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида (см., например, [1], [2]). Однако переход к системам уравнений приводит к существенному увеличению количества различных случаев важных с точки зрения приложений частных форм уравнений и способов корректных постановок главных и естественных граничных условий. Значительно усложняется при этом исследование положительной определенности главной части дифференциального оператора. Существенную роль в этих исследованиях играют неравенства типа Фридрихса [3] и Корна (см., например, [4]) для вектор-функций из соболевских пространств.

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97022)

1. Постановки задач

Рассматривается общая линейная система второго порядка дивергентного вида

$$-\mathrm{div}(\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u) + \mathcal{C}\nabla u + \mathcal{D}u = f - \mathrm{div}F, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ – n-мерное арифметическое пространство со скалярным произведением $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$, $u = \{u_i\}_{i=1}^n$ – вектор-функция (искомое решение), $\nabla u = \{\partial u_i/\partial x_j\}_{i,j=1}^n$, $\mathcal{A}$ – линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве $\mathbb{M}_n$ вещественных матриц порядка $n \geqslant 1$ со скалярным произведением $A \cdot B = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$, $\mathcal{B}$ – линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{M}_n$, каждой матрице $U(x) = \{u_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ будем ставить в соответствие вектор $\mathrm{div}U(x)$ с компонентами $(\mathrm{div}U(x))_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial u_{ij}(x)}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathcal{C}$ – линейный оператор, действующий из $\mathbb{M}_n$ в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $f = \{f_i\}_{i=1}^n$, $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Все перечисленные объекты – функции $x \in \Omega$, Ω – ограниченная область с границей Γ класса C^1.

Уравнению (1) обычным образом ставится в соответствие интегральное тождество

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} ((\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u) \cdot \nabla\eta + \mathcal{C}\nabla u \cdot \eta + \mathcal{D}u \cdot \eta)dx + \int\limits_{\Gamma} (\mathcal{G}u)_\nu \cdot \eta_\nu dx + \\ + \int\limits_{\Gamma} (\mathcal{G}u)_\tau \cdot \eta_\tau dx = \\ = \int\limits_{\Omega} (f \cdot \eta + F \cdot \nabla\eta)dx - \int\limits_{\Gamma} ((\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u)\nu)_\nu \cdot \eta_\nu dx - \\ - \int\limits_{\Gamma} ((\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u)\nu)_\tau \cdot \eta_\tau dx + \int\limits_{\Gamma} g_\nu \cdot \eta_\nu dx + \int\limits_{\Gamma} g_\tau \cdot \eta_\tau dx,\end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathcal{G} = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – заданная матрица, $g = \{g_i\}_{i=1}^n$ – заданный вектор. Здесь и далее нижние индексы ν или τ обозначают нормальную или касательную составляющую соответствующего вектора, ν – единичная нормаль к Γ, внешняя относительно области Ω.

Введем в рассмотрение соболевское пространство V вектор-функций $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, определенных на Ω, таких, что $u_i \in H^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Норму на пространстве V определим следующим образом: $\|u\|_1^2 = \int\limits_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx$.

Через V_0 будем обозначать замкнутое линейное подпространство всех функций u из V, удовлетворяющих условию $u(x) = 0$, $x \in \Gamma$, V_τ – замкнутое подпространство всех функций u из V, удовлетворяющих условию $u(x) \cdot \nu(x) = 0$, $x \in \Gamma$, V_ν – замкнутое подпространство всех функций u из V, удовлетворяющих условию $u(x) \wedge \nu(x) = 0$, $x \in \Gamma$. Здесь $a \wedge b = \{a_i b_j - a_j b_i\}_{i,j=1}^n$ – внешнее скалярное произведение векторов a, b. Поясним, что пространство V_τ состоит из вектор-функций, нормальная составляющая которых на Γ равна нулю, а V_τ – из вектор-функций, касательная составляющая которых на Γ равна нулю.

Будем говорить, что функция $u \in V_0$ – решение *задачи Дирихле* для уравнения (1), если для этой функции выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} ((\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u) \cdot \nabla\eta + \mathcal{C}\nabla u \cdot \eta + \mathcal{D}u \cdot \eta)dx = \int\limits_{\Omega} (f \cdot \eta + F \cdot \nabla\eta)dx \quad \forall \eta \in V_0. \tag{3}$$

Понятно, что в данном случае речь идет об отыскании обобщенного решения уравнения (1), удовлетворяющего однородному граничному условию Дирихле $u(x) = 0, x \in \Gamma$.

Будем говорить, что функция $u \in V$ — решение *третьей краевой задачи* задачи для уравнения (1), если для этой функции выполнено интегральное тождество

$$\int_\Omega ((\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u) \cdot \nabla\eta + \mathcal{C}\nabla u \cdot \eta + \mathcal{D}u \cdot \eta)dx + \int_\Gamma \mathcal{G}u \cdot \eta dx = \\ = \int_\Omega (f \cdot \eta + F \cdot \nabla\eta)dx + \int_\Gamma g \cdot \eta dx \quad \forall \eta \in V. \quad (4)$$

Как показывает тождество (2), в данном случае строится обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию третьего рода

$$(\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u)\nu + \mathcal{G}u = g, \quad x \in \Gamma. \quad (5)$$

Формально частным случаем третьей краевой задачи является *задача Неймана* (вторая краевая задача), состоящая в отыскании функции $u \in V$, удовлетворяющей интегральному тождеству

$$\int_\Omega \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla\eta dx = \int_\Omega (f \cdot \eta + F \cdot \nabla\eta)dx + \int_\Gamma g \cdot \eta dx \quad \forall \eta \in V. \quad (6)$$

Задача о жестком контакте[2)] состоит в отыскании функции $u \in V_\tau$ такой, что

$$\int_\Omega ((\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u) \cdot \nabla\eta + \mathcal{C}\nabla u \cdot \eta + \mathcal{D}u \cdot \eta)dx + \int_\Gamma (\mathcal{G}u)_\tau \cdot \eta_\tau dx = \\ = \int_\Omega (f \cdot \eta + F \cdot \nabla\eta)dx + \int_\Gamma g_\tau \cdot \eta_\tau dx \quad \forall \eta \in V_\tau. \quad (7)$$

В этом случае разыскивается обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x) \cdot \nu(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (8)$$

$$((\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u)\nu)_\tau + (\mathcal{G}u)_\tau = g_\tau, \quad x \in \Gamma. \quad (9)$$

Задача о нормальной нагрузке (задача Ламе). Эта задача состоит в отыскании функции $u \in V_\nu$ такой, что

$$\int_\Omega ((\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u) \cdot \nabla\eta + \mathcal{C}\nabla u \cdot \eta + \mathcal{D}u \cdot \eta)dx + \int_\Gamma (\mathcal{G}u)_\nu \cdot \eta_\nu dx = \\ = \int_\Omega (f \cdot \eta + F \cdot \nabla\eta)dx + \int_\Gamma g_\nu \cdot \eta_\nu dx \quad \forall \eta \in V_\nu, \quad (10)$$

т. е. разыскивается обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x) \wedge \nu(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (11)$$

$$((\mathcal{A}\nabla u + \mathcal{B}u)\nu)_\nu + (Gu)_\nu = g_\nu, \quad x \in \Gamma. \quad (12)$$

2. Исследование разрешимости граничных задач

Здесь будет проведено исследование обобщенной разрешимости сформулированных в предыдущем пункте граничных задач при тех или иных предположениях об исходных данных. Всюду в дальнейшем будем считать, что

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in L_\infty(\Omega), \ \mathcal{G} \in L_\infty(\Gamma), \quad F, f \in L_2(\Omega), \ g \in L_2(\Gamma). \quad (13)$$

[2)] Названия этой и последующей задач связано с приложениями в теории упругости.

Относительно оператора $\mathcal{A}$ будем предполагать выполненными два типа условий.

Наиболее просто исследование разрешимости сформулированных выше задач выполняется, если предположить, что оператор $\mathcal{A}$ равномерно положительно определен, т. е. существует положительная постоянная c_0 такая, что

$$\mathcal{A}B \cdot B \geqslant c_0 B \cdot B \quad \forall\, B \in \mathbb{M}_n, x \in \Omega. \tag{14}$$

Мы будем рассматривать также случай, когда

$$\mathcal{A}B = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}(B + B^T) \quad \forall\, B \in \mathbb{M}_n, \tag{15}$$

где

$$\mathcal{L} : \mathbb{M}_n^s \to \mathbb{M}_n^s \tag{16}$$

суть линейный равномерно положительно определенный оператор, то есть

$$\mathcal{L}B \cdot B \geqslant c_0 B \cdot B \quad \forall\, B \in \mathbb{M}_n^s, x \in \Omega, \tag{17}$$

$c_0 = \mathrm{const} > 0$, $\mathbb{M}_n^s$ — евклидово пространство всех симметричных вещественных матриц порядка n.

Условия (15)–(17) типичны для систем уравнений линейной теории упругости (см., например, [5], [4], [6]). Заметим также, что если выполнено условие (16), то, как нетрудно убедиться,

$$\mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla \eta = \mathcal{L}e(u) \cdot e(\eta) \quad \forall\, u, \eta \in V, \tag{18}$$

где $e(u) = (\nabla u + (\nabla u)^T)/2$.

Исследование разрешимости всех сформулированных выше задач будем проводить, опираясь на лемму Лакса — Мильграма. При этом точно так же, как и при исследовании одного уравнения (см., например, [1], [2])), каждая из задач записывается в виде уравнения

$$\mathbf{a}(u, \eta) = \mathbf{f}(\eta), \quad u \in \widetilde{V},\ \forall\, \eta \in \widetilde{V}, \tag{19}$$

где $\widetilde{V}$ — соответствующее подпространство пространства V, $\mathbf{a}$ — билинейная ограниченная форма на $\widetilde{V} \times \widetilde{V}$, $\mathbf{f}$ — линейная ограниченная форма на V. Доказательство положительной определенности формы $\mathbf{a}$ специфично для каждой из рассматриваемых задач.

2.1. Задача Дирихле. Заметим прежде всего, что если выполнено условие (14) или условия (15)–(17), то существует положительная постоянная c_0 такая

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla u dx \geqslant c_0 \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx \quad \forall\, u \in V_0. \tag{20}$$

В первом случае это утверждение непосредственно следует из (14). Во втором случае надо воспользоваться представлением (18) и первым неравенством Корна [4]. Пусть теперь $\mathcal{D}_0 = (\mathcal{D} + \mathcal{D}^T)/2$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{D}u \cdot u = \mathcal{D}_0 u \cdot u$. Занумеруем собственные числа матрицы $\mathcal{D}_0$ так, что $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Будем считать при этом, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ положительны, числа $\lambda_t, \lambda_{t+1}, \ldots, \lambda_n$ отрицательны. Как известно, $|\lambda_k| \leqslant \|\mathcal{D}_0\|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, поэтому $\lambda_k \in L_\infty(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Разлагая u по ортонормированному базису оператора $\mathcal{D}_0$, получим $\mathcal{D}u \cdot u = \sum\limits_{k=1}^{r} c_k^2 \lambda_k + \sum\limits_{k=t}^{n} c_k^2 \lambda_k$, $c_k = u \cdot e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, $\mathcal{D}u \cdot u \geqslant \lambda_r \sum\limits_{k=1}^{r} c_k^2 - |\lambda_n||u|^2$. Особо будем выделять случай, когда $r = n$ для почти всех $x \in \Omega$, $c_3^+ = \operatorname{ess\,inf}\limits_{x \in \Omega} \lambda_n(x) > 0$. В этом случае $\mathcal{D}u \cdot u \geqslant c_3^+ |u|^2$ на Ω. В противном случае $\mathcal{D}u \cdot u \geqslant -c_3^- |u|^2$ на Ω, где $c_3^- = \operatorname{ess\,sup}\limits_{x \in \Omega} |\lambda_n(x)|$. Отсюда по неравенству Фридрихса получаем, что

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{D}u \cdot u dx \geqslant -c_\Omega c_3^- \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Дальнейшие рассуждения и выводы о разрешимости задачи Дирихле дословно совпадают со случаем одного уравнения (см., например, [2], с. 100).

2.2. Третья краевая задача. При исследовании разрешимости этой задачи наряду с перечисленными выше условиями будем предполагать, что матрица $\mathcal{G}$ равномерно положительно определена, т. е.

$$\mathcal{G}(x)\xi \cdot \xi \geqslant c_0 \, |\xi|^2 \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}^n, \ x \in \Gamma, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

При выполнении условия (14) или условий (15)–(17) отсюда вследствие второго неравенства Корна [4] вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla u dx + \int\limits_{\Gamma} \mathcal{G}u \cdot u dx \geqslant c_0 \|u\|_1^2, \quad \forall u \in V,$$

$c_0 = \mathrm{const} > 0$. Поэтому исследование разрешимости третьей краевой задачи проводится так же, как и для одного уравнения (см., например, [2] с. 102)

2.3. Задача Неймана. Предположим сначала, что выполнено условие (14). Если $\eta = \mathrm{const}$, то левая часть равенства (6) обращается в нуль при любой функции u. Поэтому задача (6) имеет решение лишь при условии, что

$$\int\limits_{\Omega} f dx + \int\limits_{\Gamma} g dx = 0. \tag{21}$$

Понятно, что если задача (6) имеет решение, то оно определяется с точностью до постоянного слагаемого. Подчиним решение дополнительному условию

$$\int\limits_{\Omega} u dx = 0. \tag{22}$$

Обозначим через $\widetilde{V}$ подпространство пространства V, состоящее из элементов V, удовлетворяющих условию (22). Вследствие условия (14) и неравенства Пуанкаре выполнена оценка

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla u x \geqslant c_0 \|u\|_1^2 \quad \forall \, u \in \widetilde{V},$$

т. е. билинейная форма $\mathbf{a}$, соответствующая задаче (6) положительно определена на $\widetilde{V}$ и, значит задача (6) имеет при том только одно решение, удовлетворяющее условию (22).

Обратимся теперь к случаю, когда выполнены условия (15)–(17). Будем дополнительно предполагать, что $F(x) = F^T(x) \, \forall \, x \in \Omega$. Тождество (6) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{L}e(u) \cdot e(\eta) dx = \int\limits_{\Omega} (f \cdot \eta + F \cdot e(\eta)) dx + \int\limits_{\Gamma} g \cdot \eta dx \quad \forall \eta \in V. \tag{23}$$

Пусть $\mathcal{R} = \{v \in V : e(v) = 0, \ x \in \Omega\}$, как известно $\mathcal{R} = c + Wx, \ x \in \Omega, c \in \mathbb{R}^n, W = -W^T \in \mathbb{M}_n\}$. Если $\eta \in R$, то левая часть равенства (23) обращается в нуль при любой функции $u \in V$. Отсюда следует, что для разрешимости задачи (23) необходимо выполнение условия

$$\int\limits_{\Omega} f \cdot \eta dx + \int\limits_{\Gamma} g \cdot \eta dx = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{R}. \tag{24}$$

Если решение задачи (23) существует, то оно определяется с точностью до слагаемого из $\mathcal{R}$. Подчиним решение задачи (23) дополнительному условию

$$\int\limits_{\Omega} u \cdot \eta dx = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{R}. \tag{25}$$

Иначе говоря, сформулируем задачу Неймана следующим образом. Пусть

$$\widetilde{V} = \{u \in V : (u, v)_{L_2(\Omega)} = 0 \,\forall\, v \in \mathcal{R}\},$$

Требуется найти функцию $u \in \widetilde{V}$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{L}e(u) \cdot e(\eta) dx = \int\limits_{\Omega} (f \cdot \eta + F \cdot e(\eta)) dx + \int\limits_{\Gamma} g \cdot \eta dx \quad \forall \eta \in \widetilde{V}. \tag{26}$$

Вследствие условия (17) и второго неравенства Корна билинейная форма $\mathbf{a}$, соответствующая тождеству (26), положительно определена на $\widetilde{V}$, поэтому задача (26) имеет единственное решение.

2.4. Задача о жестком контакте. При исследовании этой задачи и задачи о нормальной нагрузке нам потребуется теорема

Теорема 1 (см. [3]) *Нормы* $\|\cdot\|_\nu$, $\|\cdot\|_\tau$, *определяемые равенствами*

$$\|u\|_\tau^2 = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{\Gamma} (u \cdot \nu)^2 dx \quad \forall\, u \in V,$$

$$\|u\|_\nu^2 = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{\Gamma} |u \wedge \nu|^2 dx \quad \forall\, u \in V,$$

эквивалентны норме пространства V.

Следствие 1. *Справедливы следующие оценки*

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_1 \||\nabla u|\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall u \in V_\nu, \tag{27}$$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_2 \||\nabla u|\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall u \in V_\tau, \tag{28}$$

c_1, c_2 – *положительные постоянные.*

Предположим сначала, что выполнено условие (14). Используя следствие 1, получаем, что

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla u dx \geqslant c_0 \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, u \in V_\tau,$$

где c_0 –положительная постоянная. Поэтому в рассматриваемом случае исследование разрешимости задачи (7), проводится точно так же, как и задачи Дирихле.

Пусть теперь выполнены условия (15)–(17). Ограничимся рассмотрением задачи (7) в предположении, что соответствующее интегральное тождество для определения $u \in V_\tau$ имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{L}e(u) \cdot e(\eta) dx = \int\limits_{\Omega} (f \cdot \eta + F \cdot e(\eta)) dx + \int\limits_{\Gamma} g \cdot \eta dx \quad \forall \eta \in V_\tau. \tag{29}$$

Очевидно, что задача (29) может иметь решение лишь при условии, что

$$\int\limits_{\Omega} (f \cdot \eta + F \cdot e(\eta)) dx + \int\limits_{\Gamma} g \cdot \eta dx = 0 \quad \forall \eta \in V_\tau \cap \mathcal{R}. \tag{30}$$

Решение этой задачи определяется с точностью до слагаемого из подпространства $V_\tau \cap \mathcal{R}$. Подчинив искомое решение дополнительному условию $u \in \widetilde{V}$, где $\widetilde{V} = \{u \in V_\tau : (u, v)_{L_2(\Omega)} = 0 \,\forall\, v \in \mathcal{R}_\tau\}$ и рассуждая точно так же, как и при исследовании задачи Неймана, получим, что при выполнении условия (30) задача (29) имеет единственное решение из $\widetilde{V}$.

2.4. Задача о нормальной нагрузке. Все рассуждения здесь полностью совпадают с рассуждениями предыдущего пункта, если в качестве подпространства $\widetilde{V}$ взять подпространство, определенное соотношением $\widetilde{V} = \{u \in V_\nu : (u,v)_{L_2(\Omega)} = 0 \, \forall \, v \in \mathcal{R}_\nu\}$.

Пространство $\widetilde{V}$, фигурирующее в пунктах 2.4, 2.5, зависит от формы области Ω. Так, если Ω — шар, то нетрудно показать, что для задачи о жестком контакте $\widetilde{V} = \{u(x) = Wx, \ x \in \Omega, \ W = -W^T \in \mathbb{M}_n\}$, а для задачи о нормальной нагрузке $\widetilde{V} = \{0\}$.

Это означает, что для шара решение задачи о жестком контакте определяется с точностью до бесконечно малого жесткого поворота вокруг центра шара, а в случае задачи о нормальной нагрузке решение определяется однозначно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 407 с.
2. **Карчевский М.М., Павлова М.Ф.** Уравнения математической физики. Дополнительные главы. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. — 228 с.
3. **Dubinskii Yu. A.** Some Corrcive Problems for the System of Poisson Equations // Russsian Journal of Mathematical Physics. — 2013. — V. 20, № 4. — P. 402–412.
4. **Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.** Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М: Изд-во МГУ. — 1990. — 311 с.
5. **Михлин** Проблема минимума квадратичного функционала. — М: ГИТТЛ, 1952. — 216 с.
6. **Сьярле Ф.** Математическая теория упругости. — М.: Мир, 1992. — 471 с.

REFERENCES

1. **Ladyzhenskaya O.A.** The boundary value problems of mathematical physics. — New York: Springer-Verlag, 1985. — 322 p.
2. **Karchevsky M.M., Pavlova M.F.** Equations of Mathematical Phisics (Supplementary Chapters) [Uravnenija matematicheskoi fiziki. Dopolnitel'nye glavy]. — Kazan: Izdatel'stvo Kazanskogo Universiteta, 2008) (in Russian).
3. **Dubinskii Yu. A.** Some Corrcive Problems for the System of Poisson Equations // Russsian Journal of Mathematical Physics. — 2013. — V. 20, № 4. — P. 402–412.
4. **Oleinik O.A., Iosif'yan G.A., Shamaev A.S.** Mathematical problems in the theory of strongly inhomogeneous elastic media [Matematicheskie zadachi teorii sil'no neodnorodnykh uprugikh sred]. — Moscow: Moscow University, 1990. (in Russian)
5. **Mikhlin S.G.** The problem of the minimum of a quadratic functional. — San Francisco, CA : Holden-Day, 1965.
6. **Ciarlet P.G.** Mathematical Elasticity. — Elsevier Science Publisher, 1988.